МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Филиал в г. Ташкенте

ПРОГРАММА ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО НАПРАВЛЕНИЮ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

Ташкент-2018

Программа Государственного экзамена рассчитана на студентов - выпускников факультета прикладной математики и информатики по направлению **“Прикладная математика и информатика” квалификации «Бакалавр»**

Государственный экзамен направлен на выявление индивидуального уровня сформированности общепрофессиональных и профессиональных компетенций, входящих в ФГОС бакалавра по направлению 01.03.02. «**Прикладная математика и информатика**», готовность и способность к решению комплексных задач, связанных с осуществлением запланированных видов профессиональной деятельности бакалавров, специализирующихся по прикладной математике и информатике.

Выпускной экзамен является проверкой функциональных возможностей выпускника, способности его к самостоятельным суждениям на основе имеющихся знаний.

РАЗДЕЛ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Непрерывность функций одной переменной. Разрывы первого и второго родов. Свойства непрерывных функций. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.

Общее определение непрерывности функции в точке по Гейне и Коши, связь этих определений. Описание разрывов первого и второго рода с демонстрацией соответствующих примеров. Непрерывность суммы, произведения и частного двух непрерывных функций. Ограниченность непрерывных функций, заданных на отрезке. Достижение экстремальных значений непрерывной функции, заданной на отрезке.

2. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

Определение равномерной непрерывности функции, заданной на своей области определения. Связь непрерывности и равномерной непрерывности. Примеры непрерывных функций, не являющихся равномерно непрерывными. Равномерная непрерывность непрерывных функций, заданных на отрезке [a,b].

3. Производная и дифференциал функции одной переменной. Геометрический смысл производной и дифференциала. Теорема Лагранжа. Формула Тейлора.

Определение производной и дифференциала функции, взаимосвязь между этими понятиями. Связь дифференцируемости и непрерывности функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производные суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций. Производная обратной и сложной функции. Теорема Ролля и формула конечных приращений Лагранжа. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора и остаточный член этой формулы в форме Пеано.

4. Определенный интеграл Римана. Интегральные суммы и их предел. Критерий интегрируемости с использованием сумм Дарбу.

Определенный интеграл Римана как предел интегральных сумм. Ограниченность интегрируемых функций. Верхние и нижние суммы Дарбу. Критерий интегрируемости на языке верхних и нижних сумм Дарбу. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций. Свойства интегрируемых функций. Аддитивность интеграла Римана.

5. Первообразная. Формула Ньютона – Лейбница.

Определение первообразной функции и неопределенного интеграла Свойства неопределённых интегралов. Замена переменных и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона – Лейбница.

6. Функции многих переменных. Частные производные и полный дифференциал для функций многих переменных. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

Определение предела и непрерывности для функции многих переменных. Частные производные и дифференцируемость для функций многих переменных. Связь этих понятий. Полный дифференциал для функций многих переменных. Связь дифференцируемости и непрерывности для функции многих переменных. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению. Градиент дифференцируемой функции.

7. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.

Частичные суммы и сходимость ряда. Критерий сходимости Коши для ряда. Условие сходимости положительного ряда. Сравнение положительных рядов. Признаки Коши и Даламбера. Интегральный признак сходимости рядов.

8. Абсолютная и условная сходимость рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Абсолютная и условная сходимость рядов, их взаимосвязь. Знакопеременные ряды и теорема Лейбница для таких рядов. Теорема Дирихле для абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана для не абсолютно сходящихся рядов.

9. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Признаки Вейерштрасса и Дини. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Равномерная сходимость последовательности функций. Критерий Коши для равномерной сходимости. Непрерывность равномерного предела непрерывных функций. Функциональные ряды и их равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса для равномерной сходимости ряда. Теорема Дини для положительных функциональных рядов. Предельный переход под знаком функционального ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.

10 Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Определение степенного ряда и области его сходимости. Радиус сходимости степенного ряда и формула Коши-Адамара для его вычисления. Непрерывность суммы степенного ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

РАЗДЕЛ 2. КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

11. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Комплексные числа и их полярная форма. Сходимость последовательностей комплексных чисел. Область в множестве комплексных чисел. Функции комплексного переменного, понятие предела для таких функций. Непрерывность функций комплексного переменного. Дифференцируемость функций комплексного переменного в смысле комплексного анализа. Условия Коши-Римана. Голоморфные функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной голоморфной функции.

12. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

Интегрирование функций комплексного переменного вдоль пути. Свойства интегралов от комплексных функций. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши для голоморфных функций. Ряд Тейлора для голоморфной функции. Теорема Лиувилля.

13. Ряд Лорана. Полюса и существенно особые точки. Вычеты.

Теорема Лорана о разложении в ряд функции, голоморфной в кольце. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Классификация изолированных особых точек для функций комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия наличия полюса у функций комплексного переменного. Порядок полюса. Существенно особые точки функций комплексного переменного. Критерий их существования. Вычет функций комплексного переменного в точке. Теорема Коши о вычетах.

РАЗДЕЛ 3. АЛГЕБРА

14. Кольцо многочленов от одной переменной над числовым полем. Корни многочлена. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

Определение поля. Примеры числовых полей: поля рациональных, действительных и комплексных чисел. Кольцо многочленов от одной переменной над числовым полем. Деление многочленов с остатком. Корни многочлена и их кратность. Деление многочлена на линейный многочлен без остатка и связь с корнями этого многочлена. Основная теорема алгебры для кольца многочленов над полем комплексных чисел. Разложение многочленом с комплексными коэффициентами на линейные множители.

15. Линейные пространства, их базисы, размерности. Координаты вектора. Матрица перехода к другому базису. Теорема о ранге матрицы.

Определение линейного пространства. Примеры: R^n, C^n , C[a,b]. Конечномерные линейные пространства и их базисы. Разложение элементов конечномерного линейного пространства по базису. Связь между базисами и матрица перехода от одного базиса к другому базису. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому базису. Определение ранга матрица и теорема о вычислении ранге матрицы.

16. Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, их связь с характеристическими корнями.

Линейные преобразования линейного пространства. Операции над линейными преобразованиями. Область значений и ядро линейного преобразования. Взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями n-мерного линейного пространства и квадратными матрицами порядка n. Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований. Характеристический многочлен линейного преобразования n-мерного линейного пространства и связь его корней с собственными значениями этого преобразования.

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

17. Задача Коши и теорема о существовании и единственности решения.

Определения дифференциального уравнения, порядка уравнения, общего решения, частного решения, общего интеграла, частного интеграла для дифференциальных уравнений. Интегрирования дифференциального уравнения.

18. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными, с разделяющимися переменными, линейные, однородные, Бернулли и Риккати. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах, неразрешенные относительно производной, Лагранжа, Клеро. Постановка задачи Коши, данные и условия Коши. Теорема Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка.

19. Теоремы о фундаментальной системе решений для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка и методы их интегрирования. Понижение порядка уравнения в случаях, когда заданная функция не зависит от искомой функции и производных от искомой функции до некоторого порядка, не содержит явно независимую переменную искомой функции, уравнение является однородным или обобщенно-однородным.

Линейно зависимые и независимые системы функций. Определитель Вронского. Теоремы о линейной зависимости и независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Фундаментальная система функций. Структура решений линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка. Восстановление дифференциального уравнения по фундаментальной системе. Формула Остроградского-Лиувилля. Дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

20. Теорема о фундаментальной системе решения для линейных систем.

Линейные системы дифференциальных уравнений, записанные в нормальной форме; их матричная запись. Постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности решения. Линейная зависимость, независимость систем вектор-функций. Определитель Вронского. Формула Остроградского-Лиувилля. Структура решений линейных однородных и неоднородных систем дифференциальных уравнений.

21. Метод вариации постоянных для систем дифференциальных уравнений.

Нахождение частных решений линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений методом вариации постоянных. Нахождение частных решений линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом подбора.

РАЗДЕЛ 5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

22. Центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин. Определение центральной предельной теоремы (ЦПТ). ЦПТ для последовательности независимых и одинаково распределённых случайных величин (Теорема Ляпунова). ЦПТ для последовательности независимых и разно распределённых случайных величин (Теорема Линдберга).

23. Доверительные интервалы для неизвестных параметров нормально распределённой генеральной совокупности.

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания $M\xi$ при известной дисперсии $D\xi$. Доверительный интервал для неизвестного $M\xi$ при неизвестной $D\xi$. Доверительный интервал для неизвестной $D\xi$ при известном $M\xi$. Доверительный интервал для неизвестной $D\xi$ при неизвестном $M\xi$.

РАЗДЕЛ 6. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Замкнутость класса монотонных функций алгебры логики. Лемма о немонотонной функции.

Понятие функции алгебры логики. Определение монотонной функции алгебры логики. Доказательство замкнутости класса монотонных функций алгебры логики. Формулировка и доказательство леммы о немонотонной функции.

2. Замкнутость класса линейных функций алгебры логики. Лемма о нелинейной функции.

Понятие функции алгебры логики. Определение линейной функции алгебры логики. Доказательство замкнутости класса линейных функций алгебры логики. Формулировка и доказательство леммы о нелинейной функции.

3. Теорема Поста о функциональной полноте алгебры логики.

Понятие полной системы функций. Предполные классы. Формулировка и доказательство критерия Поста о полноте систем функций алгебры логики.

4. Конечная порожденность P_k. Теорема Янова о существовании в P_k замкнутого класса, не имеющего базиса.

Понятие функций многозначной логики. Понятие базиса в P_k. Доказательство существования конечного базиса в P_k. Формулировка и доказательство теоремы Янова о существовании в P_k замкнутого класса, не имеющего базиса.

5. Теорема Мучника о существовании в P_k замкнутого класса со счетным базисом.

Понятие функций многозначной логики. Понятие базиса в P_k. Формулировка и доказательство теоремы Мучника о существовании в P_k замкнутого класса, со счетным базисом.

6. Теорема о полноте системы полиномов в P_k.

Полиномы в многозначной логике. Формулировка малой теоремы Ферма. Формулировка и доказательство теоремы о полноте системы полиномов в P_k.

7. Замкнутость класса ограниченно-детерминированных функций относительно операций суперпозиции и обратной связи. Конечная порожденность этого класса.

Понятие детерминированных и ограниченно-детерминированных функций. Операции суперпозиции и обратной памяти. Доказательство замкнутости класса ограниченно-детерминированных функций относительно операций суперпозиции и обратной связи. Доказательство существования конечной полной системы ограниченно-детерминированных функций.

8. Теорема о преобразовании периодических последовательностей ограниченно-детерминированными функциями.

Понятие конечного автомата. Автомат как преобразователь последовательностей. Формулировка и доказательство теоремы о преобразовании периодических последовательностей ограниченно-детерминированными функциями.

9. Критерий Маркова взаимной однозначности алфавитного кодирования.

Понятие алфавитного кодирования. Свойство взаимной однозначности кодов. Формулировка и доказательство критерий Маркова взаимной однозначности алфавитного кодирования.

10. Теорема Журавлева о дизъюнктивных нормальных формах типа сумма тупиковых.

Дизъюнктивные нормальные формы. Задача минимизации дизъюнктивных нормальных форм. Геометрическая интерпретация задачи минимизации дизъюнктивных нормальных форм. Тупиковые ДНФ. Формулировка и доказательство теоремы Журавлева о дизъюнктивных нормальных формах типа сумма тупиковых.

11. Понятия плоского и планарного графов. Формула Эйлера. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$.

Определение графа. Понятия плоского и планарного графов. Формула Эйлера для плоских графов. Доказательство непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$.

12. Оптимальность по порядку метода Шеннона синтеза схем из функциональных элементов.

Понятие схемы из функциональных элементов. Задача синтеза схем из функциональных элементов. Описание метода Шеннона синтеза схем из функциональных элементов и оценка его сложности. Совпадение по порядку оценки Шеннона с мощностной нижней оценкой.

РАЗДЕЛ 7. ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

13. Моделирование зрительного восприятия. Теорема Козлова об аффинной эквивалентности изображений.

Задача распознавания образов. Моделирование зрительного восприятия. Кодирование изображений. Формулировка и доказательство теоремы Козлова об аффинной эквивалентности изображений.

14. Модель персептрона Розенблатта. Теорема Новикова.

Модель формального нейрона. Простейшая нейронная сеть – персептрон Розенблатта. Формулировка и доказательство теоремы Новикова об обучении персептрона Розенблатта.

15. Теорема Гильберта-Анселя о числе монотонных функций.

Понятие монотонной функции алгебры логики. Формулировка и доказательство леммы Анселя о покрытии булевого куба цепями. Формулировка и доказательство теоремы Гильберта-Анселя о числе монотонных функций.

16. Теорема о полноте исчисления высказываний.

Логика высказываний. Формулы логики высказываний. Исчисление высказываний. Теорема дедукции Эрбрана. Лемма об интерпретациях. Формулировка и доказательство теоремы о полноте исчисления высказываний.

РАЗДЕЛ 8. ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

17. Алгоритм сортировки QSort. Теорема о среднем времени работы алгоритма.

Задача сортировки. Простейшие алгоритмы сортировки. Алгоритм сортировки QSort. Формулировка и доказательство теоремы о среднем времени работы алгоритма QSort.

18. Алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути в графе и его сложность.

Понятие пути в графе. Задача поиска кратчайшего пути в графе**.** Описание алгоритма Дейкстры поиска кратчайшего пути в графе. Обоснование сложности алгоритма Дейкстры.

19. Алгоритм построения минимального остовного дерева и его сложность.

Понятие остовного дерева. Задача построения минимального остовного дерева**.** Описание алгоритма построения минимального остовного дерева. Обоснование сложности алгоритма построения минимального остовного дерева.

20. Теорема Форда-Фалкерсона о максимальном потоке через сеть.

Потоки в сетях. Задача построения максимального потока. Формулировка и доказательство теоремы Форда-Фалкерсона о максимальном потоке через сеть.

21. Линейное программирование. Симплекс метод.

Постановки задач линейного программирования. Выпуклые многогранники. Базисный план. Угловая точка. Алгебраическая характеристика базисной точки. Алгоритм перехода од одной базисной точки к другой. Описание симплекс метода.

22. Динамическое программирование. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана.

Модель динамического программирования. Идея метода динамического программирования. Принцип оптимальности Беллмана. Задачи решаемые методами динамического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

РАЗДЕЛ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Зорич В.А. Математический анализ, ч.1, ч.2. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, ч.2. – М.: Наука, 1971, 1982.
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т.1, т.2. – М.: Высшая школа, 1970.
4. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Математический анализ, ч.1, ч.2. - Изд-во МГУ, 2007.
5. Никольский С.М. Курс математического анализа, т.1, т.2. – М.: Наука, 1973.
6. Никольский С.М. Курс математического анализа. [Учебник для вузов]. – 6-е изд., – М.: Физматлит, 2001.
7. Райков Д.А. Одномерный математический анализ. М.: Высшая школа, 1982.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учебник для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений, т.1, т.2, т.3. – Изд. 8-е. – М.: Физматлит, 2007.
9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Учебник в 2-х томах.– Изд. 6-е, СПб.: Лань, 2005.
10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972.

РАЗДЕЛ 2. КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

12.Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.
13.Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.

РАЗДЕЛ 3. АЛГЕБРА

14.Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968.

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

15. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1971.
16. Л.Э Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1969.
17. И.Г.Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1970.

РАЗДЕЛ 5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

18.Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988.
19. Боровков А.А. Теории вероятностей. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986.
20. Лоэв М. Теории вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
21. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
22. Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

РАЗДЕЛ 6. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М., Наука, 1986 г.
2. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М., Наука,1985 г.
3. Харари Ф. Теория графов. Мир, 1973.
4. Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Подколзин А.С. Основы теории интеллектуальных систем. – М.: Изд-во МАКС-ПРЕСС, 2016.

РАЗДЕЛ 7. ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

1. Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Подколзин А.С. Основы теории интеллектуальных систем. – М.: Изд-во МАКС-ПРЕСС, 2016.
2. Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Подколзин А.С. Введение в теорию интеллектуальных систем. – М.: Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 2006.

РАЗДЕЛ 8. ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

1. Ларин Р.М., Плясунов А.В., Пяткин А.В. Методы оптимизации. Примеры и задачи. учебное пособие. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2003.
2. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1979.